ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ - GAUSS - STOKES

1) Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$I = \int_S \bar{n} \cdot \nabla \times \bar{F} \, da$$

όπου $\bar{F}(x,y,z) = (z, x, 0)$ και $S = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, z = 0\}$ και το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα n να είναι το συγγραμμικό μοναδιαίο στον άξονα των z (δηλ $\bar{n} = (0,0,1)$.)

ΛΥΣΗ

$$\nabla \times \bar{F} = \text{rot}\, \bar{F} \; (= \text{div} \bar{F}) = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z & x & 0 \end{vmatrix} = (0, 1, 1)$$

Για να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα θα πρέπει να επιλέξουμε την κατάλληλη παραμετρική.
Γνωρίζουμε όμως ότι όταν η εξίσωση της επιφάνειας λύνεται ως προς τη μεταβλητή $z = f(x,y)$ τότε η παραμέτρηση που επιλέγουμε είναι η εξής:

$$\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}, \quad \forall (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$$

και εφόσον $z = 0$ τότε $\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z=0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, (x,y) \in D$

καθώς,

$$N(\varphi(x,y)) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) = (0,0,1) = \bar{n}$$

Συνεπώς,

$$I = \int_S u \cdot \nabla \times \bar{F} \, da = \int_D (0,1,1) \cdot (0,0,1) \cdot dx\,dy =$$

$$= \int_D 1 \, dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 1 \, dx\,dy = 1 \text{ τετρ. μοναδ.}$$

2) Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα

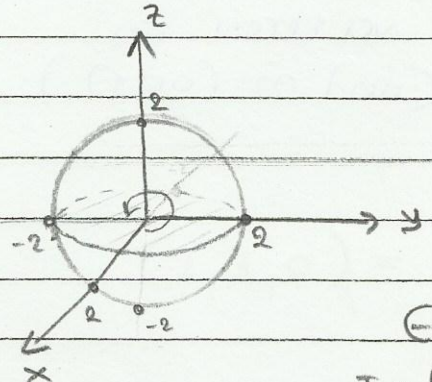
$$I=\int_S \bar{n}\cdot\bar{f}\,da$$

όπου

$\bar{f}(x,y,z)=(-2y^2+x^3,\ z^2+y^3,\ z^3-x^3)$, $S=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=4\}$

και $\bar{n}$ εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην S

ΛΥΣΗ



Η S κλειστή επιφάνεια

$$\operatorname{div}\bar{f}=\frac{\partial}{\partial x}(-2y^2+x^3)+\frac{\partial}{\partial y}(z^2+y^3)+\frac{\partial}{\partial z}(z^3-x^3)=$$

$$=3x^2+3y^2+3z^2=3(x^2+y^2+z^2)$$

Επομένως,

$$I=\int_S \bar{n}\cdot\bar{f}\,da=\int_V \operatorname{div} f\,dv=3\int_V x^2+y^2+z^2\,dv$$

Άρα, έχουμε ένα τριπλό ολοκλήρωμα:

Χρήση σφαιρικών συντεταγμένων

γεωγραφικό μήκος　　γεωγραφικό πλάτος

$$g\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho\cos\theta\cdot\sin\varphi\\ \rho\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi\\ \rho\cdot\cos\varphi\end{pmatrix}$$ με $\rho\in[0,2]$, $\theta\in[0,2\pi]$, $\varphi=[0,\pi]$

όπου $\det Dg(x,y,z)=\rho^2\sin\varphi$

Με αλλαγή μεταβλητής είναι:

$$3\int_V x^2+y^2+z^2\,dv=3\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\rho^2\rho^2\cdot\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi\,d\rho=$$

$$=3\int_0^{\rho}\rho^4\,d\rho\cdot\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{384}{5}\pi$$

3) Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$\bar{f}(\bar{r}) = \bar{f}(x,y,z) = (2z-y,\ x+z,\ 3x-2y+1)$ και το χωρίο $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 4-(x^2+y^2)\}$ που περιορίζεται από το επίπεδο $S_1: z=0$ και το παραβολοειδές $S_2: z = 4-(x^2+y^2)$. Εάν $\bar{n}$ το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο S του χωρίου V, τότε:

α. Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\int_{S_1} \bar{f}(\bar{r})\bar{n}\,da$

β. " " " " " $\int_{S} \bar{f}(\bar{r})\bar{n}\,da$

γ. " " " " " $\int_{S_2} \bar{f}(\bar{r})\bar{n}\,da$

ΛΥΣΗ

$V = \{(x,y,z) : 0 \le z \le 4-(x^2+y^2)\}$

$S_1 = \{(x,y,z) : z=0\}$ ← Επίπεδο xOy

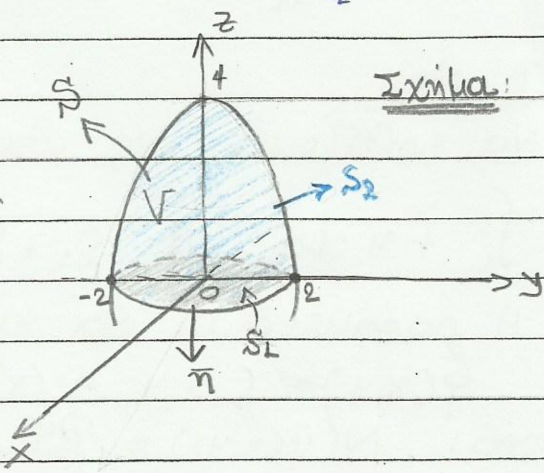
$S_2 = \{(x,y,z) : z = 4-(x^2+y^2)\}$ ← Παραβολοειδές

(για $x=0 \to z = 4-y^2 \xrightarrow{y=\pm 2} z=0$

για $z=0 \to x^2+y^2=4$)

όπου $S = S_1 + S_2$

Σχήμα:



α. Για να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα στην S_1, θα πρέπει: $S_1 = \{(x,y,z): z=0\}$ άλλα δεν είναι όλο το επίπεδο αλλά αυτό που περιορίζεται στον κυκλικό δίσκο $x^2+y^2 \le 4$ ← D_1

Επιλέγουμε την παραμετρική:

$\bar{g}(x,y) = (x,y,z=0)^T = (x,y,0)^T$

όπου $N(\bar{g}(x,y)) = \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} = (0,0,1)$

Επειδή όμως το διάνυσμα θα πρέπει να είναι το κάθετο προς τα κάτω τότε επιλέγουμε το $(0,0,-1)$

$$\int_{S_1} \bar{f}\cdot\bar{n}\,da = \int_{D_1} (-y, x, 3x-2y+1)\cdot(0,0,-1)\,da =$$

$$= \int_{D_1} (-3x+2y-1)\,dx\,dy = \int_{x^2+y^2\le 4} (-3x+2y-1)\,dx\,dy \stackrel{\text{πολικές}}{=}$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (-3\rho\cos\theta + 2\rho\sin\theta - 1)\,\rho\,d\theta\,d\rho$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \int_0^{2\pi} \cos\theta\,d\theta = 0 \\ \int_0^{2\pi} \sin\theta\,d\theta = 0 \end{array}}$$

$$= -3\int_0^2 \rho^2 d\rho \cdot \underbrace{\cancel{\int_0^{2\pi} \cos\theta\,d\theta}}_{0} + 2\int_0^2 \rho^2 d\rho \cdot \underbrace{\cancel{\int_0^{2\pi} \sin\theta\,d\theta}}_{0} +$$

$$+ \int_0^2 \rho\,d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = -4\pi.$$

β. Απο Gauss: (εφόσον S κλειστή)

$$\int_S \bar f\cdot\bar n\, da = \int_V div\, \bar f\cdot dv = \int_V \cancelto{0}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}\right)} dv = 0$$

Άρα, έχουμε ένα σωληνοειδές

γ. $\int_{S_1} \bar f\cdot\bar n\, da + \int_{S_2} \bar f\cdot\bar n\, da = \int_S \bar f\,\bar n\, da \Rightarrow$

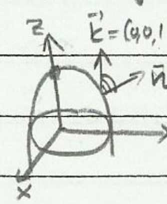
$\Rightarrow \int_{S_2} \bar f\cdot\bar n\, da = 4\pi$

β' τρόπος

Να επιλέξουμε μια παραμετρηση

$\int_{S_2} \bar f\,\bar n\, da$ || $S_2=\{(x,y,z):\ z=4-(x^2+y^2)\}$ με $D_2: x^2+y^2\le 4$.

Η παραμετρισ θα είναι η εξής:



$\bar\varphi(x,y) = (x,y,4-(x^2-y^2))$

όπου $N(\bar\varphi(x,y)) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\times\frac{\partial\varphi}{\partial y} = (2x,2y,1)$

το $N(\bar\varphi(x,y))$ έχει στον z άξονα συνιστώσα $+$ και με το $\vec k=(0,0,1)$ σχηματίζει οξεία γωνία άρα θα έχει φορά προς τα πάνω.

Άρα,

$$\int_{S_2} \bar f\cdot\bar n\, da = \int_{D_2} (2z-y,\ x+z,\ 3x-2y+1)(2x,2y,1)\, dxdy =$$

$$=\int_{D_2} (4zx-2xy+2xy+2zy+3x-2y+1)\, dxdy =$$

$$=\int_{D_2} 2(4-(x^2+y^2))(2x+y)+3x-2y+1\, dxdy \overset{\text{πολικές}}{=}$$

$$=\int_{D_2^*} 2(4-\rho^2)(2\rho\cancelto{0}{\cos\theta}+\rho\cancelto{0}{\sin\theta})+\cancelto{0}{3\cos\theta}-2\rho\cancelto{0}{\sin\theta}+1)\rho\, d\rho d\theta =$$

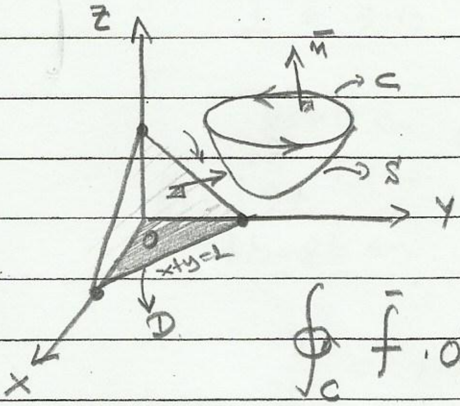
$$=\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^2\cdot 2\pi = 4\pi.$$

όπου $D_2^* = \{(\rho,\theta): 0\le\rho\le 2$ και $0\le\theta\le 2\pi\}$

4) Έστω S η επίπεδη επιφάνεια της οποίας το σύνορο C είναι: το τρίγωνο με κορυφές $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ (δηλαδή τμήμα του επιπέδου $x+y+z=1$ που βρίσκεται στο 1° ογδοημόριο. Υπολογίστε με τη βοήθεια του κατάλληλου επιφανειακού ολοκληρώματος την κυκλοφορία $\oint_c F\cdot dr$ του διανυσματικού πεδίου $F(x,y,z)=(-y,x,z)$ κατά μήκος της καμπύλης C αφού πρώτα επιλέξετε τη φορά διαγραφής της C

<u>ΛΥΣΗ</u>

Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα του Stokes



(βάσει του κανόνα δεξιού χεριού το κάθετο διάνυσμα είναι προς τα πάνω)

$$\oint_c \bar{f}\cdot dr = \int_S \operatorname{curl}\bar{f}\, dS = \int_S (0,0,2)\, d_S \quad (1)$$

όπου

$$\operatorname{curl}\bar{f} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y & x & z \end{vmatrix} = (0,0,2)$$

Ενώ, $x+y+z=1 \Rightarrow z = 1-x-y$

Επιλέγουμε παραμετροποίηση

$\varphi(x,y) = (x, y, 1-x-y)^T$ με κάθετο διάνυσμα

$N(\varphi(x,y)) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \times \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = (1,1,1)$ (εντός αυτού φαίνεται ότι το $x+y+z=1$ έχει κάθετο το $(1,1,1)$)

Συνεπώς,

(1): $\displaystyle\int_D (0,0,2)\cdot(1,1,1)\, dx\,dy = 2\int_D dx\,dy = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ τετρ. μον.

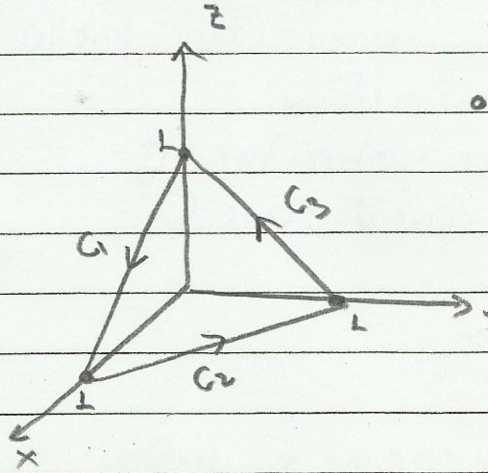
$D: E_D = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}$

ή άλλος τρόπος να προσεγγίσουμε το $\int_D dxdy$ είναι

$$2\int_D dx\,dy = 2\int_0^1\int_0^{1-x} dy\,dx = 1 \text{ τετρ. μον.}$$

Βεβαίως, για επαλήθευση μπορούμε να πάμε και ανάποδα

$$\oint_C \bar{F} dr = \oint_C (-y, x, z)\, dr = \oint_C -y\, dx + x\, dy + z\, dz \quad (2)$$



• για τη C_1: $\begin{cases} x = 1 + t(0-1) = 1-t \rightarrow dx = -dt \\ y = 0 + t(1-0) = t \rightarrow dy = dt, \quad t \in [0,1] \\ z = 0 + t(0-0) = 0 \rightarrow dz = 0 \end{cases}$

Άρα,

$$\oint_{C_1} \bar{f} dr = \int_0^1 (-t(-1) + (1-t)1 + 0)\, dt =$$

$$= \int_0^1 \cancel{t} + 1 - \cancel{t}\ dt = 1$$

• για τη C_2: $\begin{cases} x = 0 + t(0-0) = 0 \rightarrow dx = 0 \\ y = 1 + t(0-1) = 1-t \rightarrow dy = -dt, \quad t \in [0,1] \\ z = 0 + t(1-0) = t \rightarrow dz = dt \end{cases}$

Άρα, $\oint_{C_2} \bar{f} dr = \int_0^1 (0 + 0 + t)\, dt = \frac{1}{2}$

Όμοια και για τη C_3:

$x = 0 + t(1-0) = t \rightarrow dx = dt$

$y = 0 + t(0-0) = 0 \rightarrow dy = 0 \quad t \in [0,1]$

$z = 1 + t(0-1) = 1-t \rightarrow dz = -dt$

Άρα,

$$\oint_{C_3} \bar{f} dr = \int_0^1 (0 + 0 + t - 1)\, d = -\frac{1}{2}$$

Άρα, (2): $\oint_C \bar{f} dr = \oint_{C_1} \bar{f} dr + \oint_{C_2} \bar{f} dr + \oint_{C_3} \bar{f} dr = 1$

Δηλαδή έχουμε επαληθεύσαμε και το θεώρημα Stokes

5) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Stokes, υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_C -y^3 dx + x^3 dx - z^3 dz.$$

όπου C η τομή του κυλίνδρου $x^2+y^2=1$ με το επίπεδο $x+y+z=1$ και ο προσανατολισμός της C αντιστοιχεί αντίθετα των δεικτών του ρολογιού στο επίπεδο xy

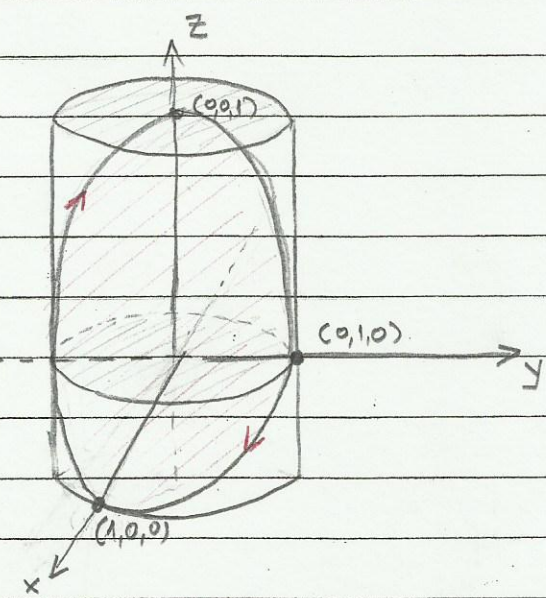
ΛΥΣΗ

$z = 1-x-y = f(x,y)$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$

$F(x,y,z) = (-y^3, x^3, -z^3)$

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y^3 & x^3 & -z^3 \end{vmatrix} = (0, 0, 3x^2+3x^2)$$



Από το Θ. του Stokes

$$\oint_C (-y^3, x^3, -z^3)\, d(x,y,z) =$$

$$= \int_S (\nabla \times \bar{F})\, dS = \int_D (3x^2+3y^2)\, dx\, dy = 3\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 r\, d\theta\, dr = \frac{3\pi}{2}$$

Ας επιβεβαιώσουμε και το αποτέλεσμα μας από τον υπολογισμό του επικαμπυλίου.

Παραμετρικοποιούμε την καμπύλη ∂D:

$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 1 - \sin t - \cos t$ ← για τη C

Άρα

$$\oint_C (-y^3, x^3, -z^3)\, d(x,y,z) =$$

$$\left[\text{Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος } \sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}, \ \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2} \right]$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^3 t, \cos^3 t, (\cos t + \sin t - 1)^3) \cdot (-\sin t, \cos t, -\cos t + \sin t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^4 t + \cos^4 t + \underbrace{(\cos t + \sin t - 1)^3 \cdot (-\cos t + \sin t)}_{\to 0}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t)\, dt - \int_0^{2\pi} (1 - \sin t - \cos t)^3 \cdot (-\cos t + \sin t)\, dt = \frac{3\pi}{2}$$